

§ 2.6. Le nombre e .

-73-

Proposition Soit $(x_n) : x_0 = 1, x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \forall n \geq 1$; $(y_n) : y_0 = 1, y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \forall n \geq 1$

Alors

- (1) $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) $y_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (3) $(y_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (4) $(x_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \leq 3 \quad \left. \begin{array}{l} (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e' \leq 3.$

Dém. (1) $x_0 \leq y_0$; $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{(n-2)}{n}}_{\leq 1} \dots \underbrace{\frac{(n-k+1)}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}$$

$$x_n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n \quad \forall n \geq 1.$$

(2) $y_n \leq 3$: par récurrence $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 2$ base: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ **Vrai**

hérédité: $\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}}$ **Vrai** $\Rightarrow$ par récurrence on a:

par supposition $\rightarrow \frac{1}{(k-1)!} \leq \frac{1}{2^{k-2}} \leq \frac{1}{2}$

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

La formule: $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \forall x \neq 1$. Soit $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$x = \frac{1}{2}$

$$(3) \quad y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = y_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow (y_n) \uparrow$$

-74-

$$(4) \quad (x_n) \uparrow \quad \text{Voir [DZ §2.4.2]}$$

Dém: $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$: Moyenne géométrique $\leq$ moyenne arithmétique.

$$\text{Soient } a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = a_n = (1 + \frac{1}{n}). \text{ Alors } \sqrt[n+1]{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n} \leq \frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} \Rightarrow \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n} \leq \frac{1 + n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

Déf

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \stackrel{\text{déf}}{=} e$$

Remarque.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$$

[DZ, §2.4.3, 2.44]

$$e = 2.718281828459045235360287 \dots$$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.

2. Soient $x_n = a_p n^p + \dots + a_0$ et $y_n = b_q n^q + \dots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, & \text{si } p < q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \infty, & \text{si } p > q \end{aligned}$$

cours
du 13 octobre

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.

4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

← cours du 20 octobre

Série 5

cours
du 18
octobre

Suites définies par récurrence.

- 76 -

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

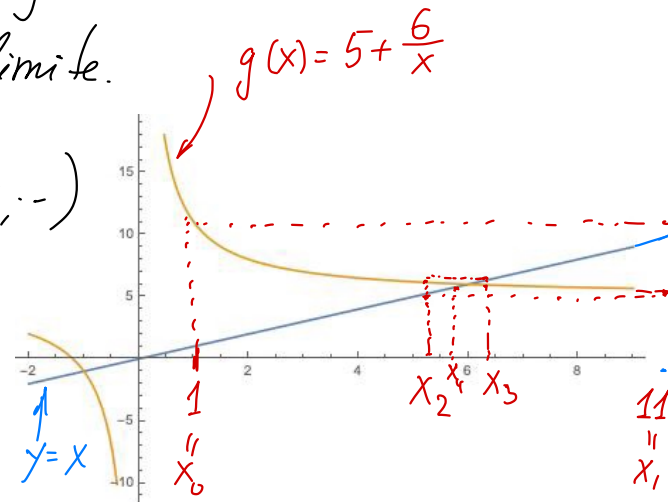
Questions: convergence ; si la suite converge, trouver la limite.

Ex 1. $x_0 = 1$; $x_{n+1} = 5 + \frac{6}{x_n}$ ($\Rightarrow x_1 = 5 + \frac{6}{1} = 11$; $x_2 = 5 + \frac{6}{11}$; ...)

(1) Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \neq 0$. Alors $\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l}$

$\Rightarrow$ on obtient l'équation pour l : $l = 5 + \frac{6}{l} \Rightarrow l^2 - 5l - 6 = 0$

$$\Rightarrow l = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow l = 6, l = -1.$$



(2) $x_n > 5$ $\forall n \geq 1$ par récurrence : $x_1 = 11 > 5$ vrai ; $x_{n+1} = 5 + \frac{6}{x_n} > 5$ vrai $\forall n \geq 1$
Alors si la suite converge, la limite est 6.

$$(3) |x_{n+1} - l| = \left| 5 + \frac{6}{x_n} - \left(5 + \frac{6}{l} \right) \right| = \left| \frac{6}{x_n} - \frac{6}{l} \right| = \frac{6|l - x_n|}{|x_n| \cdot |l|} < \frac{6}{25} |l - x_n| < \left(\frac{6}{25} \right)^2 |l - x_{n-1}| < \dots$$

$$\Rightarrow 0 \leq |x_{n+1} - l| < \underbrace{\left(\frac{6}{25} \right)^n}_{\downarrow n \rightarrow \infty} |l - x_1|$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$0$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$ suite géométrique avec $r = \frac{6}{25} < 1$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - l| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - l) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 6}$$

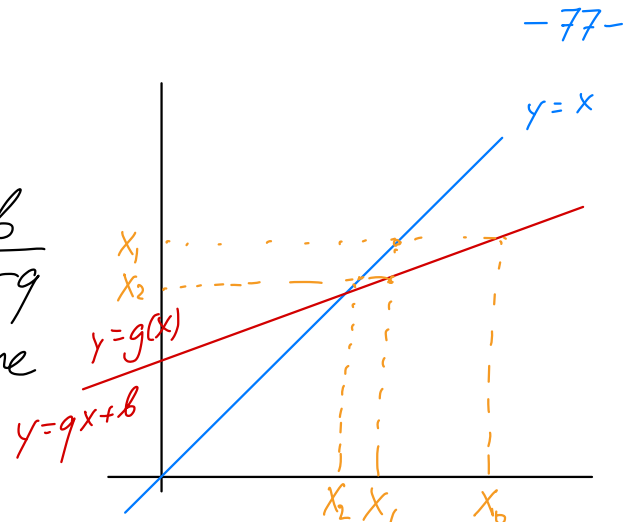


Proposition (Récurrence linéaire).

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = q a_n + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$.

Alors (1) si $|q| < 1 \Rightarrow (a_n)$ converge vers $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$

(2) si $|q| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge sauf si (a_n) est une suite constante.



Dém: (1) Supposons que (a_n) converge $\Rightarrow$ l'équation pour la limite est $l = q l + b \Rightarrow l = \frac{b}{1-q}$

Convergence: ($|q| < 1$): $\forall n \geq 1$ on a:

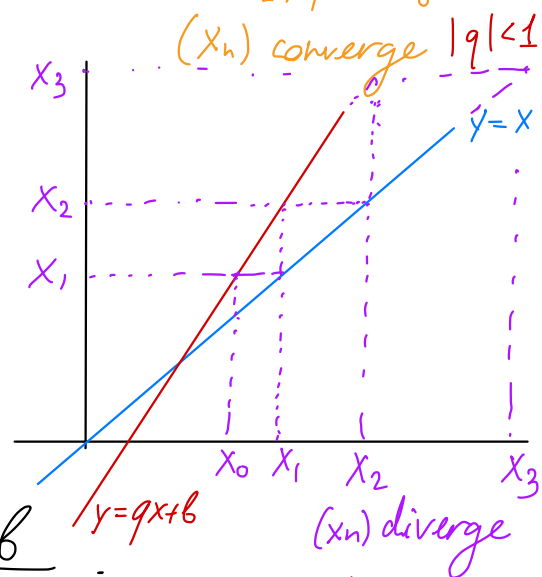
$$0 \leq |a_{n+1} - l| = |q a_n + b - (q l + b)| = |q| |a_n - l| = \dots = |q|^{n+1} |a_0 - l| \xrightarrow[|q| < 1]{n \rightarrow \infty} 0 \text{ suite géométrique}$$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - l| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$

(2) Si $|q| > 1$ et $a_0 \neq \frac{b}{1-q} \Rightarrow$ la suite diverge: $l = q l + b \Rightarrow |a_{n+1} - l| = |q|^{n+1} |a_0 - l|$, $|q| > 1$
 $\Rightarrow |a_{n+1} - l|$ n'est pas bornée $\Rightarrow (a_n)$ diverge.

(3) $q = 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + b \Rightarrow a_n = a_0 + n b$ suite arithmétique; si $b \neq 0 \Rightarrow$ divergente.
Si $b = 0 \Rightarrow a_n = a_0 \forall n \in \mathbb{N}$.

(4) $q = -1 \Rightarrow a_{n+1} = -a_n + b \Rightarrow a_0 = a_2 = a_{2k} \forall k \in \mathbb{N}$; $a_1 = -a_0 + b = a_3 = \dots = a_{2k+1} \forall k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow (a_n)$ diverge sauf si $a_0 = -a_0 + b \Leftrightarrow a_0 = \frac{b}{2} \Rightarrow a_n = \frac{b}{2} \forall n \in \mathbb{N}$.



Proposition Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g: E \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ telle que

(1) $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq g(x) \leq M \quad \forall x \in E$

(2) est croissante : $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$.

Alors la suite (x_n) $x_{n+1} = g(x_n)$ est bornée et monotone $\Rightarrow$ convergente (Série 6)

Remarque. Si (2) est remplacé par $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ (g est décroissante)
 $\Rightarrow$ alors (x_n) n'est pas monotone ! (mais elle peut être convergente)

Ex 2. $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, $x_0 = 4 \Rightarrow g(x) = 5 - \frac{6}{x}$ est croissante, $x > 0$

$x_0 = 4$, $x_1 = 5 - \frac{6}{4} = \frac{7}{2} < x_0$. Si $x_{n+1} < x_n \xrightarrow{g(x) \uparrow} g(x_{n+1}) < g(x_n) \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$
 $\Rightarrow (x_n) \downarrow$ par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$

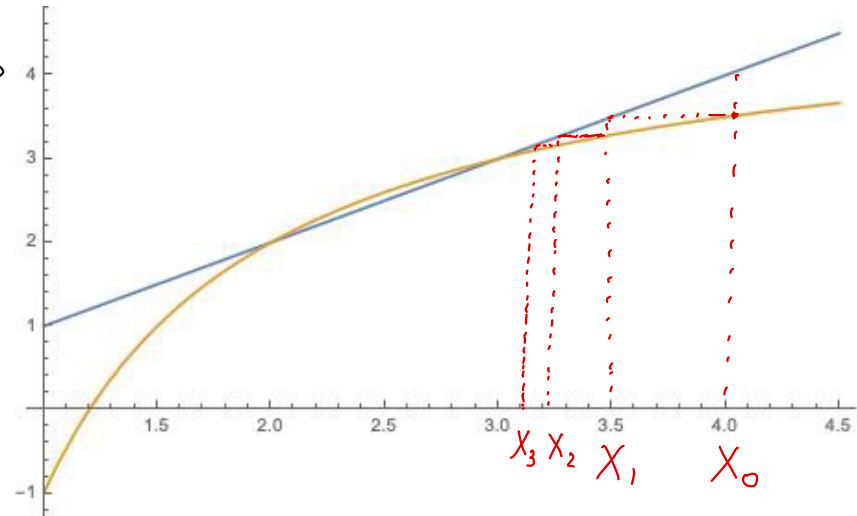
Si $x > 3 \Rightarrow g(x) = 5 - \frac{6}{x} > 5 - 2 = 3 \Rightarrow x_0 = 4 > 3 \Rightarrow x_1 > 3 \Rightarrow x_2 > 3, \dots$

$\Rightarrow x_n > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ est minorée par 3, $(x_n) \downarrow \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 3$.

L'équation pour la limite: $\ell = 5 - \frac{6}{\ell} \Rightarrow$

$\ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = 3; 2$

puisque $(x_n) \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$



Quelques méthodes pour étudier les suites définies par récurrence.

(1) Trouver les candidats pour la limite en supposant qu'elle existe.

Si l'équation n'admet pas de solution $\Rightarrow$ la suite diverge.

(2) Étudier la convergence: *(Faire un graphique)*

(a) Récurrence linéaire : $x_{n+1} = q x_n + b \Rightarrow$

Si $|q| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-q}$

Si $|q| > 1$ (x_n) diverge sauf si $x_0 = \frac{b}{1-q}$ (suite constante)

Si $|q| = 1$ (x_n) diverge sauf si (x_n) est constante.

(b) Si $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x)$ croissante $\Rightarrow$ la suite est monotone.

Si $x_0 < x_1 \Rightarrow (x_n) \uparrow \Rightarrow$ essayer de démontrer que (x_n) est majorée } $\Rightarrow$ convergente.
 Si $x_0 > x_1 \Rightarrow (x_n) \downarrow$ ———— (x_n) est minorée

(c) Proposition. Si (x_n) et (a_n) deux suites: $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 et $\exists l \in \mathbb{R} : (x_{n+1} - l) = a_n (x_n - l)$. Alors (x_n) converge *(Serie 5)*.

(d) $x_{n+1} = g(x_n)$; $g(x)$ n'est ni linéaire, ni croissante $\Rightarrow$

Si $|x_{n+1} - l| \leq b_n |x_n - l|$ et $0 < b_n < \rho < 1$

$\Rightarrow x_n$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ *(Ex 1)*.

(e) Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy (à voir plus tard).

$\Rightarrow (x_n)$ est convergente *[DZ Ex. 2.7.3]*

§2.8. Sous-suites. Suites de Cauchy.

-80-

Déf Une sous-suite d'une suite (a_n) est une suite $k \rightarrow a_{n_k}$,
où $k \rightarrow n_k$ est une suite strictement croissante de nombres naturels.

Ex. $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$
 $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$

mais (a_n) est divergente.

Proposition. (convergence d'une sous-suite).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow$ toute sous-suite (a_{n_k}) converge aussi vers l .

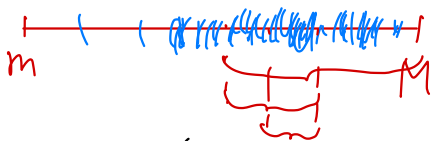
Dém. Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$. ▣

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans toute suite bornée il existe
une sous-suite convergente.

Idée: $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq (a_n) \leq M \Rightarrow$ On divise l'intervalle $[m, M]$ par 2

On retient la moitié contenant un nombre infini d'éléments de (a_n) .



Puis on recommence. La longueur des intervalles $= \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

En choisissant un élément dans chaque intervalle plus loin dans la suite,
on obtient une sous-suite convergente.